数理解析研究所講究録
96巻 1970年 30-43

$\mathbb{C}^n$ における多項式近似について

阪大 教養 阪井 章

§0. はじめに

コムパクトな Hausdorff 空間 X の上の複素数値連続関数の全体を $C(X)$ とし，$C(X)$ の m 個の関数 $f_1, \cdots, f_m$ によって生成される $C(X)$ の閉部分環を $[f_1, \cdots, f_m ; X]$ であらわす．特に K が $\mathbb{C}^n$ の有界閉集合のとき，$[z_1, \cdots, z_n ; K]$ を $P(K)$ とかく．多項式近似の一般的問題は $[f_1, \cdots, f_m ; X] = C(X)$ となる X または $f_1, \cdots f_m$ に対する条件を求めることである．$A = [f_1, \cdots, f_m ; X]$ に対して，A の maximal ideal space を M_A とするとき，$f_1, \cdots, f_m$ の joint spectrum

$$\sigma(f_1, \cdots, f_m) = \{(\hat{f}_1(x), \cdots, \hat{f}_m(x)) \ ; \ x \in M_A\}$$

を K とすると，K は $\mathbb{C}^m$ の多項式凸な有界閉集合であり，A と $P(K)$ とは同型である．(Gamelin [1] p.69 参照) したがって

(I) $P(K) = C(K)$ となるのはどんなときか？

或いはもっと一般に

(II) $P(K)$ は $C(K)$ のどんな部分環か？

というのが多項式近似の問題である．

$n=1$ の場合は，問題（I）が Lavrentieff [2] によって，また問題（II）は Mergerian [3] によって解決されている：

Lavrentieff の定理

$$P(K) = C(K) \iff \begin{cases} \text{(i) } \mathbb{C}\setminus K \text{ が連結} \\ \text{(ii) } K \text{ の内部 } K^\circ \text{ が空} \end{cases}$$

Mergerian の定理

$$P(K) = A_1(K) \iff \mathbb{C}\setminus K \text{ が連結.}$$

こゝで $A_1(K)$ は K で正則な $C(K)$ の関数全体である．

$n \geqq 2$ の場合，(i) に相当する条件は "K が多項式凸" である．K の近傍で正則な関数によって K 上一様近似出来る関数の全体を $A(K)$ であらわすとき，

Oka–Weil の定理

$$P(K) = A(K) \iff K \text{ が多項式凸}$$

があり，これによって問題（II）は

（III）どんな多項式凸な K に対して $A(K) = C(K)$ となるか？

に帰着する．（しかし多項式凸という条件は完全に幾何学とはいえない）

条件 (ii) は $A(K) = C(K)$ のための十分条件ではない．$n=1$ のときは $A(K)$ は K 上に極をもたない有理関数によって K 上一様近似出来る関数の全体 $R(K)$ に一致する．$K^\circ = \phi$ で $R(K) \neq C(K)$ である例には Mergerian の Swiss cheese

がある.([3]). また$n \geqq 2$のときはKが$\mathbb{C}^n$の複素部分多様体を含む場合を考えればよい. また$n=1$のとき$\mathrm{mes}(K)=0$なら$A(K)=C(K)$であるが, 多変数ではこの条件が十分でないことも明らかであろう.

Wermerは[4]において, $\mathbb{C}^2$の実部分多様体Sが$\mathbb{C}$の閉円板D上のある関数のグラフとして与えられる場合について, もしSが多項式凸でその関数が$\bar{z}$に"近い"とき$P(S)=C(S)$であることを示した. この結果はFreeman[5]によって実2次元多様体の場合に拡張された. Stolzenberg[6]は$\mathbb{C}^n$内の滑らかな曲線弧Γについて$P(\Gamma)=C(\Gamma)$を示した. Wells[7]は複素多様体のコムパクトな実解析的多様体Sがtotally real(後述)であるとき$A(S)=C(S)$が成り立つことを証明し, 後にR. Nirenberg-Wells[8]とHörmander-Wermer[9]は, Sが$\mathbb{C}^n$の充分滑らかな実部分多様体で, totally realであるとき, その多項式凸なコムパクト部分集合Kに対して$P(K)=C(K)$が成り立つことを証明した.

こゝでの目的は, これらの結果の一部を問題(I)を中心に紹介することである.

§1. 実2次元多様体の場合

Weierstrassの定理　$\mathbb{C}^n$の有界閉集合Kに対して

$$[z_1,\cdots,z_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n\,;\,K]=C(K)$$

から次の問題が考えられる.

(IV) n個の関数 $f_1,\cdots,f_n$ がどんな関数のとき

$[z_1,\cdots,z_n,f_1,\cdots,f_n\,;\,K]=C(K)$ であるか?

一般にK上のm個の関数 $f_1,\cdots,f_m\in C(K)$ に対して,そのグラフ $K^*=\{(z_1,\cdots,z_n,f_1(z),\cdots,f_m(z))\,;\,z\in K\}$ は $\mathbb{C}^{n+m}$ の有界閉集合で,$[z_1,\cdots,z_n,f_1,\cdots,f_m\,;\,K]$ は $P(K^*)$ に同型である. したがって問題(IV)は問題(I)の特別の場合である.

Wermerは$n=1$で,Kが閉円板D: $|z|\leqq 1$ の場合を扱った.

定理1 (Wermer [10]) $f(z)=\bar{z}+R(z)$ とする.

(1) $|R(z)-R(z')|<|z-z'|\qquad z,z'\in D,\ z\neq z'$

$\Longrightarrow\qquad [z,f\,;\,D]=C(D).$

定理2 (Wermer [4]) $f\in C^1(D)$ のD上のグラフが多項式凸で,

(2) Dの各点aに対して　$f_{\bar{z}}(a)\neq 0.$

$\Longrightarrow\qquad [z,f\,;\,D]=C(D).$

定理1, 2の証明の骨子は,$a\in D$に対して

$$(3)\quad f_n(z)\longrightarrow\frac{1}{z-a},\quad |f_n(z)|\leqq\frac{2}{|z-a|}\qquad(z\neq a)$$

を充たす $[z, f; D]$ の関数列 $\{f_n\}$ を見出すことにある. そしてもし $\mu \perp [z, f; D]$ なら, (3) から

$$0 = \int f_n(z)\,d\mu(z) \longrightarrow \int (z-a)^{-1} d\mu(z) \qquad a \in D.$$

であり, $a \in D$ のときは $(z-a)^{-1} \in P(D) \subset [z, f; D]$ だから結局すべての a に対して $\int (z-a)^{-1} d\mu(z) = 0$. したがって Bishop の定理 [11] によって $\mu = 0$.

定理 2 の条件 (2) は "殆んど到る所 $f_{\bar{z}} \neq 0$" でおきかえてよいことがその証明からわかる. 条件 (1), (2) は "$f(z)$ が $\bar{z}$ に近い" ということであるが, これを $f(z)$ が $C(D)$ の位相で $\bar{z}$ に近いという条件に置きかえることは出来ない. ([12] 参照)

この方法を推し進めて, Freeman は定理 2 を実 2 次元多様体の場合に拡張した. M を滑らかな境界をもつ C^∞ 級実多様体, $\mathfrak{F}$ を $C^1(M)$ のある関数族とし, A は $\mathfrak{F}$ によっ生成される M 上の uniform algebra とする. $\mathfrak{F}$ のすべての $\nu (= \dim M)$ 個の関数 $f_1, \cdots, f_\nu$ の選び方に対して $df_1 \wedge \cdots \wedge df_\nu(p) = 0$ をみたす M の点 p の集合を E であらわし, $\mathfrak{F}$ の exceptional set という.

<u>定理 3</u> (Freeman [5]) $\dim M = 2$, $M_A = M$, $\mathrm{mes}(E) = 0$

$$\Rightarrow \qquad A = C(M)$$

特に, $M = D$, $\mathfrak{F} = \{z, f\}$ のときは $E = \{a \in D; f_{\bar{z}}(a) = 0\}$ であり, $M_A = D$ は D 上の f のグラフ D^* が多項式凸と同値であるから, この定理は定理 2 を含んでいる.

§2. totally real な多様体

X を複素多様体，S をその C^1 級実部分多様体とする．$p \in S$ における S の接空間 $T_p(S)$ の複素部分ベクトル空間

$$H_p(S) = T_p(S) \cap J_p \cdot T_p(S)$$

の次元が正のとき，S は p で complex tangent を持つと云う．S がすべての点で complex tangent を持たないとき，S は totally real であると云う．X が $\mathbb{C}^n$ の時は，S が p で complex tangent を持たないことは，$\mathbb{C}^n$ の適当な座標変換によって

$$T_p(S) = \{(z_1, \cdots, z_n) \,;\, \mathrm{Re}\, z_1 = \cdots = \mathrm{Re}\, z_\nu = z_{\nu+1} = \cdots = z_n = 0\}$$

（ただし $\nu = \dim S$）と表わされることゝ同値である．

Ω が $\mathbb{C}^n$ の領域のとき，$f_1, \cdots, f_m \in C^1(\Omega)$ の Ω 上のグラフ

$$\Omega^* = \{(z_1, \cdots, z_n, f_1(z), \cdots, f_m(z)) \,;\, z \in \Omega\}$$

は $\mathbb{C}^{n+m}$ の C^1 級実部分多様体である．Ω^* が点 $(a, f(a))$　$(a \in \Omega)$ で complex tangent を持つということは次の事と同値である：

$$\exists\, \xi, \eta \in \mathbb{C}^n,\ \xi \neq 0,\ \eta \neq 0 \ ;\ (\xi, df(\xi)) = i\,(\eta, df(\eta)).$$

$\xi = i\eta$ であるからこれを計算して

$$(4) \qquad \mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \quad \begin{matrix} j=1, \cdots m \\ k=1, \cdots n \end{matrix} \right)_{z=a} < n$$

を得る．特に $m = n = 1$ のときは $f_{\bar{z}} = 0$ である．したがって定理 2 は次のように云いかえることが出来る．

D^* が多項式凸で totally real なら $P(D^*) = C(D^*)$

後で用いられる性質を補題として述べる.

<u>補題1</u>　S が $\mathbb{C}^n$ の totally real な実部分多様体のとき,十分小さい正数 ε に対して S の管状近傍 $T_\varepsilon(S)$ は擬凸.

証明には z と S との距離を $d(z, S)$ とするとき, $\varphi(z)= d(z, S)^2$ が $T_\varepsilon(S)=\{z ; \varphi(z)<\varepsilon\}$ で多重劣調和であることを示す.

<u>補題2</u>　Ω が $\mathbb{C}^n$ の開集合, S が Ω に含まれる totally real な C^r 級実部分多様体とする. $u \in C^r(\Omega)$ に対して次の性質をもつ $v \in C^r(\Omega)$ が存在する:

(5)　S 上で $v \equiv u$.

(6)　$\bar{\partial} v(z)=o(d(z, S)^{r-1})$　($z \to S$; S 上広義一様)

これは S が totally real なら $p \in S$ の接空間 $T_p(S)$ 上では(適当な座標変換によって)多項式が実多項式とみなされ,したがって Poincaré の補題により,多項式に対する $\bar{\partial}$-問題が解けると云う事実を用いて帰納法で証明されるのであるが詳しいことは省略する. ([8], [9], [13] 等を参照).

§3. 一般次元の場合

<u>定理4</u>　(Hörmander-Wermer [9]) S が $\mathbb{C}^n$ の totally real な C^r 級実部分多様体 $(r \geqq \frac{1}{2}(\dim S+2))$, K が S の多項式凸なコンパクト部分集合であれば

$$P(K)=C(K)$$

証明は補題1, 2と次の

補題3　ε-Ball $|z|<\varepsilon$ を B_ε とする.

$u\in L^2(B_\varepsilon)$, $\bar\partial u = f$, $f\in C(B_\varepsilon)$ ならば $u\in C(B_\varepsilon)$ で

(7)　$u(0)\leqq C(\varepsilon^{-n}\|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} + \varepsilon\, \sup_{B_\varepsilon}\|f\|)$

Hörmander の定理（[14], [15]）

Ω が $\mathbb{C}^n$ の擬凸領域で $f\in L^2_{loc}(\Omega)$, $\bar\partial f = 0$ ならば $\bar\partial g = f$ となる $g\in L^2_{loc}(\Omega)$ が存在し，任意の $K\Subset\Omega$ に対して $\|g\|_{L^2(K)}\leqq C\|f\|_{L^2(K)}$ が成り立つ.

を用いて次のようになされる.

Kを含む開集合Ωに対しC^∞級の関数uをKの近傍で正則な関数で近似すればよい. 補題2のvをとり, $\bar\partial v = f$とおく. $\omega_\varepsilon = T_\varepsilon(K)$ とすると $\dim S = \nu$ として (6) から

$$\|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{r-1}\varepsilon^{\frac{1}{2}(2n-\nu)})\qquad(\varepsilon\to 0)$$

εを十分小さくとれば補題1とHörmanderの定理により

$$\bar\partial g_\varepsilon = f,\quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}\leqq C\|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$$

となる $g_\varepsilon\in L^2(\omega_\varepsilon)$ がとれる　$u_\varepsilon = v - g_\varepsilon$ とおくと ω_ε で $\bar\partial g_\varepsilon = 0$.　$z\in K$に対しては (5), (7)より

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(z)-u(z)| &= |u_\varepsilon(z)-v(z)| = |g_\varepsilon(z)|\\ &\leqq C(\varepsilon^{-n}\|g_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} + \varepsilon\|f\|_{L^\infty(\omega_\varepsilon)})\\ &= o(\varepsilon^{r-1-\frac{1}{2}\nu})\qquad(\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

$\nu\leqq 2r-1$ だから $u\in A(K)$.

定理5（[9]）Kを$\mathbb{C}^n$のコムパクト集合Uをその近傍，$R_j \in C^{n+1}(U)$，$f_j = \bar{z}_j + R_j$　$(j=1,\cdots,n)$とする．

(8) $\exists k\ (0<k<1)\quad |R_j(z)-R_j(z')| \leqq k|z-z'|\quad z, z' \in U$

$$\Longrightarrow\quad [z_1,\cdots,z_n, f_1,\cdots,f_n\,;K] = C(K)$$

証明．条件(8)を保って$R_j(z)$を$\mathbb{C}^n$全体に拡張出来る．(Valentine [16])．$\mathbb{C}^n$上の$f_1,\cdots,f_n$のグラフをSとする．(8)によってSは$\mathbb{C}^{2n}$のtotally realな実部分多様体である．
$A = [z_1,\cdots,z_n, f_1,\cdots,f_n\,;K]$とおくと，Aは$P(K^*)$と同型であるから$P(K^*)$が多項式凸であることを示すには，Aのすべてのcomplex homomorphism φがK上のpoint evaluationであることを示せばよい．$\varphi(z_j)=\alpha_j$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$とし．

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n}(z_j-\alpha_j)(f_j(z)-f_j(\alpha))$$

とおくと，$F \in A$，$\varphi(F)=0$で(8)から

$$\left|F(z)-\sum_{j=1}^{n}|z_j-\alpha_j|^2\right| \leqq k\sum_{j=1}^{n}|z_j-\alpha_j|^2$$

$$\therefore\ z \neq \alpha \text{ なら }\quad \mathrm{Re}\,F(z) > 0.$$

K上のφの表現測度mをとると

$$0 = \mathrm{Re}\,\varphi(F) = \int \mathrm{Re}\,F\,dm$$

したがってmはDirac測度δ_αである．ゆえに$\alpha \in K$でφはpoint evaluationである．

(8)において$k=1$とすることは出来ない．$R_j(z) = -\bar{z}_j$とおけばよい．

R. Nirenberg－Wells [8] は種々の定理を証明しているが，定理４に相当するものを１つだけ挙げると，

<u>定理６</u>　S は Stein 多様体 X のコムパクト又は有限な C^{∞} 級実部分多様体とする．S が totally real で $\mathcal{O}(X)$－凸ならば　$A(S, X) = C(S)$

こゝで $A(S, X)$ は $\mathcal{O}(X)$ の関数によって S 上一様近似出来る関数全体を表わす．

§4. 問題（II）について．

Wermer は [4] において次の定理を示した．

<u>定理７</u>　$E = \{a \in D\,;\ f_z(a) = 0\}$ とするとき

$$[z, f\,; D] = \{g \in C(D)\,;\ g|_E \in A(E)\}.$$

これに対応する Hörmander－Wermer [9] の結果は

<u>定理８</u>　Ω は $\mathbb{C}^n$ の開集合，S は Ω の閉部分集合，K_0 は S のコムパクト部分集合で次の条件をみたす：

(1°)　$S \setminus K_0$ は C^r 級の totally real 実部分多様体．$(r \geq \frac{1}{2}(\dim S + 2))$.

(2°)　正則凸な K_0 の（S に関する）近傍 K が存在する．

$$\Longrightarrow \quad A(K) = \{g \in C(K)\,;\ g|_{K_0} \in A(K_0)\}$$

Nirenberg－Wells [8] にも対応する結果が証明されているが省略する．

§5. peak point との関係

<u>Wermer の peak point conjecture</u>

X 上の uniform algebra A について，$M_A = X$ でしかも X の各点が A の peak point ならば $A = C(X)$.

これが一般に成立しないことは Cole の反例が示している.（Browder [17] 参照）. しかし X が $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 K で A が $A(K)\ (= R(K))$ の時はこの予想は正しい.（[12]）

peak point に関聯して Freeman は [5] で次の事を示した.

<u>定理 9</u>　M, $\mathcal{F}$, A, E は §1 と同じとする.

$$M_A = M \implies M\setminus E \text{ の点はすべて } A \text{ の peak point.}$$

証明. $M\setminus E$ の点が A の local peak point であることを示せばよい（Rossi [18]）. $p \in M\setminus E$ なら $df_1\wedge\cdots\wedge df_\nu(p) \neq 0$ となる $f_1, \cdots f_\nu \in \mathcal{F}$ がある. p のまわりの座標 $(x_1, \cdots x_\nu)$ を選んで $A = \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_\nu)}{\partial(x_1, \cdots, x_\nu)}_p$ とすると $|A| \neq 0$. そこで

$$P(f_1, \cdots, f_\nu) = (f_1 \cdots f_\nu)\cdot {}^t(A^{-1})\cdot(A^{-1})\cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix}$$

とおくと p のある近傍 U に対して $P(f_1, \cdots f_\nu) \in A|_U$ で更に $h = 1 - P(f_1, \cdots, f_\nu)$ とおくと

$$h(p) = 1 > |h(q)| \qquad q \in U - \{p\}$$

dim M = 2 で $E = \phi$ のときは定理 3 により. これが peak point conjecture の特別の場合の解答を与える.

Mが$\mathbb{C}^n$の閉集合で $\mathcal{F}=\{z_1,\cdots,z_n,f_1,\cdots,f_n\}$ の場合には

$z\in M\setminus E \iff \mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_k}\right)=n$

$\iff$ zに対応するグラフM^*上の点$(z,f(z))$

でMがcomplex tangentを持たない.

が成り立つから. 定理9により

M上の$(f_1\cdots f_n)$のグラフM^*が多項式凸であるとき,

M^*の点pでM^*がcomplex tangentを持たなければ

pは$P(M^*)$のpeak pointである.

が成り立つ.

引　用　文　献

[1]. Gamelin : Uniform algebras, Prentice-Hall ('69)

[2] Lavrentieff M. A. : Sur les fonctions d'une variable complex représentables par des séries de polynomes, Hermann, Paris ('36)

[3] Mergerian S. N : Uniform approximations to functions of a complex variables, AMS Transl. 101 ('54)

[4] Wermer. J. : Polynomially convex disks, Math. Ann. 158 ('65) 6-10.

[5] Freeman M : Some conditions for uniform approximation on a manifold, Function algebra, ('65) 42-65.

[6] Stolzenberg G: Uniform approximation on smooth curves, Acta. Math. 115 ('66) 195 — 198

[7] Wells R. O.: Holomorphic approximation on real-analytic submanifolds of a complex manifold, Proc. AMS 17 ('66) 1272 — 1275

[8] Nirenberg R. — Wells R. O.: Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans AMS 142 ('69) 15 — 35

[9] Hörmander L. — Wermer J.: Uniform approximation on compact subsets in $\mathbb{C}^n$, Math. Scand. 23 ('68) 5 — 21

[10] Wermer J.: Approximation on a disk, Math Ann. 155 ('64) 331 — 333.

[11] Bishop E.: A minimal boundary for function algebras P. J. M. 9 ('59) 629 — 642

[12] Wermer J.: Banach algebras and analytic functions, Advances in Math. Academic Press. ('61)

[13] Freeman M: Tangential Cauchy-Riemann equations and uniform approximation P. J. M. 33 ('70) 101 — 108

[14] Hörmander, L: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Math. 113 ('65) 89 — 152

[15] Hörmander L. : An introduction to complex analysis in several variables, Princeton N. J. ('66)

[16] Valentine F. A. : A Lipschitz condition preserving extension of a vector function A.J.M. 67 ('45) 83 - 93

[17] Browder A. : Introduction to function algebras, Benjamin ('69)

[18] Rossi H. : The local maximal modulus principle, Ann. Math. 72 ('60) 1 — 11